ГЛАВА 2

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ ПРИ ПРИНЯТИИ ФИНАНСОВО-КРЕДИТНЫХ РЕШЕНИЙ

2.1. **Базовые** понятия финансовой математики. Способы начисления **процентов**

Четкое представление о базовых понятиях финансовой математики необходимо для понимания всего последующего материала. Главное из таких понятий - процентные деньги (далее - проценты), определение которых составляет сущность большинства финансовых расчетов.

Проценты - это доход от предоставления капитала в долг в различных формах (ссуды, кредиты и т.д.) либо от инвестиций производственного или финансового характера.

Процентнаяставка — величина, характеризующая интенсивностьначисленияпроцентов.

Величина получаемого дохода (т.е. процентов) определяется исходя из величины вкладываемого капитала, срока, на который он предоставляется в долг или инвестируется, размера и вида процентной ставки (ставки доходности).

Наращение (рост) первоначальной суммы долга - увеличение суммы долга за счет присоединения начисленных процентов (дохода).

Множитель (коэффициент) наращения - это величина, показывающая, во сколько раз вырос первоначальный капитал.

Период начисления - промежуток времени, за который начисляются проценты (получается доход).

В дальнейшем будем полагать, что период начисления совпадает со сроком, на который предоставляются деньги. Период начисления может разбиваться на интервалы начисления.

Интервал начисления - минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов.

Существуют две концепции и, соответственно, *два способа* определения и начисления процентов: декурсивный и антисипативный (предварительный).

При *декурсивном* способе проценты начисляются в конце каждого интервала начисления. Их величина определяется исходя из величины предоставляемого капитала. Соответственно декурсивная процентная ставка (ссудный процент) представляет собой выраженное в процентах отношение суммы начисленного за определенный интервал дохода к сумме, имеющейся на начало данного интервала ($i = \frac{I}{P}$).

При *антисипативном способе* проценты начисляются в начале каждого интервала начисления. Сумма процентных денег определяется исходя из наращенной суммы. Процентной ставкой будет выраженное в процентах отношение суммы дохода, выплачиваемого за определенный интервал, к величине наращенной суммы, полученной по прошествии этого интервала. Определяемая таким способом процентная ставка называется учетной ставкой или антисипативным процентом ($d = \frac{D}{S}$).

В мировой практике декурсивный способ начисления процентов получил наибольшее распространение. В странах развитой рыночной экономики антисипативный метод начисления процентов применялся, как правило, в периоды высокой инфляции.

При обоих способах начисления процентов процентные ставки могут быть либо ***простыми*** (если они применяются к одной и той же первоначальной денежной сумме в течение всего периода начисления), либо ***сложными*** (если по прошествии каждого интервала начисления они применяются к сумме долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов).

2.2. Простые и сложные ставки ссудных процентов

Простые ставки ссудных (декурсивных) процентов применяются обычно в краткосрочных финансовых операциях, когда интервал начисления совпадает с периодом начисления (и составляет, как правило, срок менее одного года), или когда после каждого интервала начисления кредитору выплачиваются проценты. Естественно, простые ставки ссудных процентов могут применяться и в любых других случаях по договоренности участвующих в операции сторон.

Введем следующие обозначения:

i (%) – простая годовая ставка ссудного процента;

i – относительная величина годовой ставки процентов;

I_r – сумма процентных денег, выплачиваемых за год;

I – общая сумма процентных денег за весь период начисления;

P – величина первоначальной денежной суммы;

S – наращенная сумма;

$Кн$ – коэффициент наращения;

n – продолжительность периода начисления в годах;

∂ – продолжительность периода начисления в днях;

K – продолжительность года в днях.

Величина K является ***временной базой*** для расчета процентов.

В зависимости от способа определения продолжительности финансовой операции рассчитывается либо ***точный***, либо ***обыкновенный*** (коммерческий) процент.

Дата выдачи и дата погашения ссуды всегда считаются за один день. При этом возможны два варианта:

1) используется точное число дней ссуды, определяемое по специальной таблице, где показаны порядковые номера каждого дня года; из номера, соответствующего дню окончания займа, вычитают номер первого дня;
2) берется приблизительное число дней ссуды, когда продолжительность полного месяца принимается равной 30 дням; этот метод используется, когда не требуется большая точность, например, при частичном погашении займа.

Точный процент получают в случае, когда за временную базу берут фактическое число дней в году (365 или 366) и точное число дней ссуды.

Определение современной величины P наращенной суммы S называется ***дисконтированием***, а определение величины наращенной суммы S – ***компаудированием***.

$S = P(1 + i \cdot n)$ – компаудирование по простой ссудной ставке;

$P = \dfrac{S}{(1 + i \cdot n)}$ – дисконтирование по простой ссудной ставке.

Если продолжительность ссуды менее одного года, можно использовать следующие формулы:

$$S = P(1 + i \cdot \frac{\delta}{K})\,; \quad P = \frac{S}{(1 + i \cdot \frac{\delta}{K})}.$$

Преобразуя формулы (т.е. заменяя входящие в них выражения на эквивалентные и выражая одни величины через другие), получаем еще несколько формул для определения неизвестных величин в различных случаях:

$$n = \frac{S-P}{P \cdot i}\,; \delta = \frac{S-P}{P \cdot i} \cdot K\,; i = \frac{S-P}{P \cdot n}\,; i = \frac{S-P}{P \cdot \delta} \cdot K\,.$$

Иногда на разных интервалах начисления применяются разные процентные ставки. Если на последовательных интервалах начисления $i_1, i_2, \ldots i_N$ используются ставки процентов

$i_1, i_2, ... i_N$, то доход кредитора в конце интервала составит:

$$I_1 = P \cdot n_1 \cdot i_1,$$

в конце второго интервала: $I_2 = P \cdot n_2 \cdot i_2$, и т.д.

При N интервалах начисленная наращенная сумма составит:

$$S = P(1 + \sum_{t=1}^{N} n_t \cdot i_t).$$

Если после очередного интервала начисления доход (т.е. начисленные за данный интервал проценты) не выплачивается, а присоединяется к денежной сумме, имеющейся на начало этого интервала, для определения наращенной суммы применяют формулы сложных процентов. Сложные ссудные проценты в настоящее время являются весьма распространенным видом применяемых в различных финансовых операциях процентных ставок.

$$S = P(1+i)^n, \quad P = \frac{S}{(1+i)^n}.$$

Если срок ссуды n в годах не является целым числом, множитель наращения определяют по выражению:

$$K_H = (1+i)^{n_a} \cdot (1 + i \cdot n_b), \text{ тогда } S = P \cdot (1+i)^{n_a} \cdot (1 + i \cdot n_b),$$

где $n = na + nb$;

na – целое число лет;

nb – оставшаяся дробная часть года.

Начисление сложных процентов может осуществляться не один, а несколько раз в году. В этом случае оговаривается номинальная ставка процентов j – годовая ставка, по которой определяется величина ставки процентов, применяемой на каждом интервале начисления.

При m равных интервалах начисления и номинальной процентной ставке j эта величина считается равной j/m.

Если срок ссуды составляет n лет, то получаем выражение для определения наращенной суммы:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Здесь mn – общее число интервалов начисления за весь срок ссуды.

Если общее число интервалов начисления не является целым числом (mn – целое число интервалов начисления, l – часть интервала начисления), то выражение принимает вид:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \left(1 + l\frac{j}{m}\right).$$

Для целого числа периодов начисления используется формула сложных процентов, а для оставшейся части – формула простых процентов.

В Казахстане в настоящее время наиболее распространенным является начисление процентов по полугодиям, поквартальное и ежемесячное (иногда интервалом начисления может являться и день). Такие проценты, начисляемые с определенной периодичностью, называются дискретными.

Пример 1.

Ссуда в размере 5 млн тенге выдана на полгода по простой ставке ссудных процентов 20% годовых. Определить наращенную сумму.

Решение:

$S = 5\ (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 5{,}5$ (млн·тенге).

Пример 2.

Кредит в размере 10 млн тенге выдан 2 марта до 11 декабря под 18% годовых, год високосный. Определить размер наращенной суммы для различных вариантов (обыкновенного и точного) расчета процентов.

Решение:

1) В случае точных процентов берем $\delta = 284$:

$S = 10\ (1 + 284/366 \cdot 0{,}18) = 11{,}4$ (млн тенге);

2) для обыкновенных процентов с точным числом дней ссуды:

$S = 10\ (1 + 284/360 \cdot 0{,}18) = 11{,}42$ (млн тенге);

3) для обыкновенных процентов с приближенным числом дней ссуды ($\delta = 280$):

$S = 10\ (1+280/360 \cdot 0{,}18) = 11{,}94$ (млн тенге).

Пример 3.

Кредит в размере 20 млн тенге выдается на 3,5 года. Ставка процентов за первый год – 15%, а за каждое последующее полугодие она увеличивается на 1%. Определить множитель наращения и наращенную сумму.

Решение:

$К_н = 1 + 0{,}15 + 0{,}5\ (0{,}16 + 0{,}17 + 0{,}18 + 0{,}19 + 0{,}2) = 1{,}6.$

$S = 20 \cdot 1{,}6 = 32$ млн тенге.

Пример 4.

Определить период начисления, за который первоначальный капитал в размере 20 млн тенге вырастет до 65 млн тенге, если используется простая ставка процентов 20% годовых.

Решение:

$n = (65 - 20)/(20 \cdot 0{,}2) = 11{,}25$ года.

Пример 5.

Определить простую ставку процентов, при которой первоначальный капитал в размере 24 млн тенге достигнет 26 млн тенге через 100 дней. $K = 365$.

Решение:

$i = (26 - 24)/(24 \cdot 100) \cdot 365 = 0{,}31$, или 31%.

Пример 6.

Кредит выдается под простую ставку 18% годовых на 250 дней. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком и сумму процентных денег, если величина кредита составляет 40 млн тенге. Год не високосный.

Решение:

$P = 40 / (1 + 250/365\ 0{,}18) = 35{,}62$ (млн тенге).

$I = 40 - 35{,}62 = 4{,}38$ (млн тенге).

Пример 7.

Первоначальная вложенная сумма равна 200 тыс. тенге. Определить наращенную сумму через пять лет при использовании простой и сложной ставок ссудных процентов в размере 12% годовых. Решить этот пример также для случаев, когда проценты начисляются по полугодиям, поквартально.

Решение:

По формуле для простых процентных ставок имеем:

$S = 200\ (1 + 5 \cdot 0{,}12) = 320$ (тыс. тенге).

По формуле для сложных процентов:

$S = 200\ (1 + 0{,}12)^5 = 200 \cdot 1{,}76 = 352{,}5$ (тыс. тенге).

По формуле для начисления по полугодиям:

$S = 200\ (1 + 0{,}06)^{10} = 200 \cdot 1{,}79 = 358$ (тыс. тенге).

Из той же формулы для поквартального начисления:

$S = 200\ (1 + 0{,}03)^{20} = 200 \cdot 1{,}806 = 361{,}2$ (тыс. тенге).

Пример 8.

Первоначальная сумма долга равна 300 тыс. тенге. Определить наращенную сумму через 2,5 года начисления сложных процентов по ставке 20,0% годовых.

Решение:

$S = 300\ (1 + 0{,}2)^2 \cdot (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}2) = 475{,}2$ (тыс. тенге)

Пример 9.

Определим современную (текущую, настоящую, приведенную) величину суммы 500 тыс. тенге, выплачиваемой через три года, при использовании ставки сложных процентов 20% годовых.

Решение:

$$P = \frac{500}{(1 + 0{,}2)^3} = 289{,}35 \text{ (тыс. тенге).}$$

2.3. Простые и сложные учетные ставки

При антисипативном способе начисления процентов сумма получаемого дохода рассчитывается исходя из суммы, получаемой по прошествии интервала начисления (т.е. из наращенной суммы). Эта сумма и считается величиной получаемого кредита (или ссуды). Так как в данном случае проценты начисляются в начале каждого интервала начисления, заемщик, естественно, получает эту сумму за вычетом процентных денег. Такая операция называется дисконтированием по учетной ставке, а также коммерческим или банковским учетом.

Доход, полученный по учетной ставке, т.е. разница между размером кредита и непосредственно выдаваемой суммой, называется ***дисконтом.***

Пусть:

$d(\%)$ – простая годовая учетная ставка;

d – относительная величина учетной ставки;

$D_г$ – сумма процентных денег, выплачиваемая за год;

D – общая сумма процентных денег;

S – сумма, которая должна быть возвращена;

P – сумма, получаемая заемщиком.

Тогда, согласно определениям, имеем следующие формулы:

$$d = \frac{D_г}{S},\ D_г = d \cdot S,\ D = n \cdot D_г = n \cdot d \cdot S,$$

$$P = S - D = S(1 - n \cdot d) = S\left(1 - \frac{\delta}{K} \cdot d\right),$$

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d} = P \div \left(1 - \frac{\delta}{K} \cdot d\right).$$

На практике учетные ставки применяются главным образом при учете (т.е. покупке) векселей и других денежных обязательств.

Из приведенных формул можно вывести еще две формулы для определения периода начисления и учетной ставки при прочих заданных условиях:

$$n = \frac{S - P}{S \cdot d},\ d = \frac{S - P}{S \cdot n} = \frac{S - P}{S \cdot \delta} \cdot K.$$

Рассмотрим теперь антисипативный способ начисления сложных процентов. Компаудирование и дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по следующим формулам:

$$S = \frac{P}{(1 - d)^n};\ P = S(1 - d)^n.$$

В литературе часто можно встретить утверждение, что декурсивный метод начисления более выгоден для заемщика, а антисипативный – для кредитора. Это можно считать справедливым лишь для небольших процентных ставок, когда расхождение не столь значительно. Но с ростом процентной ставки разница в величине наращенной суммы становится огромной (при этом она сама растет с ростом n), и сравнение двух методов с точки зрения выгодности утрачивает смысл.

Так же, как и при декурсивном способе, возможны различные варианты начисления антисипативных процентов (начисление за короткий – меньше года – интервал, начисление m раз в году и т.д.). Им будут соответствовать формулы, полученные аналогичным образом.

Так, для периода начисления, не являющегося целым числом, имеем:

$$K_н = \frac{1}{(1 - d)^{n_a} \cdot (1 - d \cdot n_b)}.$$

Для начисления процентов m раз в году формула имеет следующий вид:

$$S = \frac{P}{\left(1 - \frac{g}{m}\right)^{mn}} \text{ или } S = \frac{P}{\left[\left(1 - \frac{g}{m}\right)^{mn} \cdot \left(1 - l\frac{g}{m}\right)\right]}$$

При этом mn – целое число интервалов начисления за весь период начисления, l – часть интервала начисления.

Пример 1.

Кредит выдается на полгода по простой учетной ставке 15,0%. Рассчитать сумму, получаемую заемщиком, и величину дисконта, если требуется возвратить 20 млн тенге.

Решение:

$P = 20\ (1 - 0{,}5 \cdot 0{,}15) = 18{,}5$ (млн тенге).

$D = 0{,}5 \cdot 0{,}15 \cdot 20 = 1{,}5$ (млн тенге).

Пример 2.

Сумма возврата кредита с процентами составляет 4 млн тенге. Кредит выдается по учетной ставке 15,0% годовых. Определить срок, на который предоставляется кредит, если заемщик желает получить на руки 3 млн тенге.

Решение:

$n = (4 - 3)/(4 \cdot 0{,}15) = 1{,}6$ года.

Пример 3.

Рассчитать учетную ставку, которая обеспечивает получение 6 млн тенге, если сумма ***возврата составляет 7 млн тенге, а ссуда выдается на полгода.***

Решение:

$d = (7 - 6) / (7\ 0.5) = 0{,}29 = 29{,}0\%$.

Пример 4.

Первоначальная сумма долга равняется 25 млн тенге. Определить величину наращенной суммы через три года при применении декурсивного и антисипативного способов начисления процентов. Годовая ставка – 18,0%.

Решение:

$S = 25(1 + 0{,}18)3 = 41{,}08$ (млн тенге); $S = \dfrac{25}{(1-0{,}18)^3} = 45{,}34$ (млн тенге).

Данный пример наглядно демонстрирует ощутимость различия в результатах при разных способах начисления процентов на фоне больших сумм и высоких процентных ставок.

Пример 5.

Определим современное значение суммы в 12 млн тенге, которая будет выплачена через два года, при использовании сложной учетной ставки 16,0% годовых.

Решение:

$P = 12\ (1 - 0{,}16)^2 = 8{,}47$ (млн тенге).

2.4. Эквивалентность процентных ставок различного типа

Часто при расчетах, проводимых по различным финансовым операциям, возникает необходимость в определении эквивалентных процентных ставок.

Эквивалентные процентные ставки - это такие процентные ставки разного вида, применение которых при различных начальных условиях дает одинаковые финансовые результаты.

Эквивалентные процентные ставки необходимо знать в случаях, когда существует возможность выбора условий финансовой операции и требуется инструмент для корректного сравнения различных процентных ставок.

Для нахождения эквивалентных процентных ставок используют *уравнения эквивалентности*, принцип составления которых заключается в следующем. Выбирается величина, которую можно рассчитать при использовании различных процентных ставок (обычно это наращенная сумма S). На основе равенства двух выражений для данной величины составляется уравнение эквивалентности, из которого путем соответствующих преобразований получается соотношение, выражающее зависимость между процентными ставками различного вида.

Рассмотрим случай, когда все условия финансовой операции совпадают, т.е. первоначальный капитал, временная база, метод расчета (точный или обыкновенный) процентов и период начисления одинаковы. В противном случае применяются те же рассуждения и преобразования, только полученные формулы будут содержать несколько большее количество переменных.

Повторим формулы для определения наращенной суммы при различных способах начисления процентов:

$$S = P(1 + i \cdot n)\ ; \quad S = \frac{P}{1 - n \cdot d}\ ;$$

$$S = P(1+i)^n;\ S = \frac{P}{(1-d)^n};$$

$$S = P\cdot\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn};\ S = \frac{P}{\left(1-\frac{g}{m}\right)^{mn}}.$$

Приравнивая эти формулы попарно, можно получить соотношения, выражающие зависимость между любыми двумя различными процентными ставками.

Рассмотрим несколько случаев.

1) $1+ni = \frac{1}{1-nd}$, откуда $i = \frac{d}{1-nd}$; $d = \frac{i}{1+ni}$.

2) $1+ni = (1+i_c)^n$, откуда $i = \frac{(1+i_c)-1}{n}$; $i_c = \sqrt[n]{1+ni} - 1$.

3) $1+ni = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$, откуда $i = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}$;

$j = m\left(\sqrt[mn]{1+ni}-1\right)$

Для различных случаев сложных процентов получаем следующее уравнение эквивалентности:

4) $(1+i_c)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}$, откуда $i_c = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1$;

$j = m(\sqrt[m]{1+i_c} - 1)$.

Полученная по последней формуле годовая ставка сложных процентов, эквивалентная номинальной процентной ставке, называется эффективной (действительной) ставкой сложных процентов.

Эффективную ставку сложных процентов полезно знать, чтобы оценить реальную доходность финансовой операции, или сравнить процентные ставки в случае, когда используются различные интервалы начисления. Очевидно, что значение эффективной процентной ставки больше значения номинальной, а совпадают они при $m = 1$.

Далее для установления эквивалентности между сложными учетными ставками и сложными ставками ссудных процентов имеем:

5) $(1+i_c)^n = \frac{1}{(1-d_c)^n}$, откуда $i_c = \frac{d_c}{1-d_c}$;

$d_c = \frac{i_c}{1+i_c}$.

Аналогичным образом получаем зависимости между любыми другими эквивалентными процентными ставками.

Проанализировав полученные формулы, можно отметить, что:

1) эквивалентность различных процентных ставок никогда не зависит от величины первоначальной суммы P (для данного рассматриваемого случая, когда первоначальная сумма P предполагается одинаковой);

2) эквивалентность процентных ставок всегда зависит от продолжительности периода начисления за исключением случая эквивалентности между собой сложных процентных ставок разного вида (если период начисления один и тот же).

Пример 1.

Срок уплаты по долговому обязательству – полгода, учетная ставка равна 15%. Какова доходность данной операции, измеренная в виде простой ставки ссудного процента?

Решение:

$i = \frac{d}{1-nd} = \frac{0{,}15}{1-0{,}5\cdot 0{,}15} = 0{,}1622$, или 16,22%.

Пример 2.

Кредит на два года предоставляется под 16,0%-ную ставку сложных процентов. Начисление происходит ежеквартально. Определить эквивалентную ставку простых процентов.

Решение:

$$i=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}=\frac{\left(1+\frac{0,16}{4}\right)^{8}-1}{2}=0,18,\text{ или }18\%.$$

Пример 3.

Рассчитать эффективную ставку сложных процентов, если номинальная ставка равна 12% и начисление процентов происходит ежемесячно.

Решение:

$$i_{\epsilon}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1=\left(1+\frac{0,12}{12}\right)^{12}-1=1,1268-1=0,1268,\text{ или }12,68\%.$$

Пример 4.

Определить, под какую ставку процентов выгоднее поместить капитал в 1млн тенге на пять лет:

а) под простую ставку ссудных процентов 12% годовых?

б) под сложную ставку ссудных процентов в 16% при ежеквартальном начислении?

Решение:

В данном случае не обязательно считать величину наращенной суммы, получаемой при различных процентных ставках. Достаточно найти, например, простую процентную ставку, эквивалентную данной сложной ставке.

$$i=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}=\frac{\left(1+\frac{0,16}{4}\right)^{20}}{5}=\frac{2,1911}{5}=0,4382,\text{ или }43,82\%.$$

Так как простая процентная ставка (43,82%), которая дала бы одинаковый с данной сложной процентной ставкой результат, значительно превышает предложенную (12%), ясно, что гораздо выгоднее использовать сложную процентную ставку. Посчитаем теперь наращенные суммы, получаемые в двух случаях, чтобы увидеть, насколько более выгодна сложная ставка:

а) $S=P(1+i\cdot n)=1(1+0,12\cdot 5)=1,6$ (млн тенге);

б) $S=P(1+i)^{n}\ 1\left(1+\frac{0,16}{4}\right)^{20}=1\cdot 2,1911=2,1911$ (млн тенге)

Ощутимая разница в результатах подтверждает сделанный ранее вывод. Можно заметить, что решение примера с использованием эквивалентных процентных ставок требует в два раза меньше вычислений.

2.5. Учет инфляционного обесценения денег в принятии финансовых решений

Инфляция характеризуется обесценением национальной валюты (т.е. снижением ее покупательной способности) и общим повышением цен в стране. Очевидно, что в различных случаях влияние инфляционного процесса сказывается неодинаково. Так, если кредитор (инвестор) теряет часть дохода за счет обесценения денежных средств, то заемщик может получить возможность погасить задолженность деньгами сниженной покупательной способности.

Во избежание ошибок и потерь в условиях снижения покупательной способности денег рассмотрим механизм влияния инфляции на результат финансовых операций и проведем несложные математические расчеты и преобразования.

Пусть S_{α} – сумма, покупательная способность которой с учетом инфляции равна покупательной способности суммы при отсутствии инфляции. Через ΔS обозначим разницу между этими суммами.

Отношение ΔS / S, выраженное в процентах, называется ***уровнем инфляции.***

При расчетах используют относительную величину уровня инфляции – темп инфляции α.

$$\alpha=\frac{\Delta S}{S}.$$

Тогда для определения S_{α} получаем следующее выражение:

$$S_{\alpha}=S+\Delta S=S+S\cdot\alpha=S(1+\alpha).$$

Величину $(1 + a)$, показывающую, во сколько раз S больше S (т.е. во сколько раз в среднем выросли цены), называют *индексом* ***инфляции Iu.***

Динамика индекса инфляции за несколько лет отражает изменения, происходящие в инфляционных процессах. Понятно, что повышение индекса инфляции за определенный период по сравнению с таким же предыдущим периодом указывает на ускорение инфляции, снижение — на уменьшение ее темпов.

Пусть a годовой уровень инфляции. Это значит, что через год сумма S' будет больше суммы S в $(1 + a)$ раз. По прошествии еще одного года сумма S_α^{II} будет больше суммы S_α^{I} в $(1 + a)$ раз, т.е. больше суммы S в $(1 + \alpha)^2$ раз. Через n лет сумма S^n вырастет по отношению к сумме S в $(1 + a)^n$ раз. Отсюда видно, что инфляционный рост суммы S при годовом уровне инфляции a - то же самое, что наращение суммы S по сложной годовой ставке процентов a.

Разумеется, те же рассуждения применяются, если вместо года берется любой другой временной интервал (квартал, месяц, день и т.д.).

Очень важно запомнить данную аналогию со сложным процентом, так как одна из наиболее часто встречающихся ошибок, связанных с расчетом уровня инфляции за некоторый период, связана именно с неучетом данного обстоятельства.

Например, если цены каждый месяц растут на 2%, то за годовой уровень инфляции принимают 2% × 12 = 24%. Такие расчеты часто используют банки и финансовые компании, привлекая клиентов вкладывать средства, к примеру, под 25% годовых. Между тем, если уровень инфляции составляет 2% в месяц, это значит, что за месяц цены вырастают в (1 + 0,02) = 1,02 раз, а за год – в $1{,}02^{12} = 1{,}2682$ раза. Значит, годовой темп инфляции составляет 1,2682 – 1 = 0,2682, т.е. годовой уровень инфляции достигает 26,82%. После такого расчета процентная ставка 25% годовых теряет свою инвестиционную привлекательность и может рассматриваться лишь в плане минимизации потерь от инфляции.

Далее рассмотрим различные случаи задания уровня инфляции.

Если известен годовой уровень инфляции α, то за период в n лет (при том, что $n = n_a + n_b$ и n_a – целое число лет, n_b – оставшаяся нецелая часть года) индекс инфляции, очевидно, составит следующую величину:

$$I_u = (1+\alpha)^{n_a}(1+n_b\cdot\alpha).$$

В некоторых случаях может быть задан уровень инфляции α_m за короткий (меньше года) интервал. Тогда за период, составляющий m таких интервалов, индекс инфляции будет равен:

$$I_u = (1+\alpha_m)^m.$$

Теперь можно приложить представленные выше варианты начисления процентов к условиям инфляционной экономики.

Если в обычном случае первоначальная сумма P при заданной ставке процентов превращается за определенный период в сумму S, то в условиях инфляции она должна превратиться в сумму S_α, что требует уже иной процентной ставки.

Назовем ее ***ставкой процентов, учитывающей инфляцию.***

Пусть:

I_u – ставка простого ссудного процента, учитывающая инфляцию;

d_α – учетная простая ставка процента, учитывающая инфляцию;

$i_{c\alpha}$ – ставка сложного ссудного процента, учитывающая инфляцию;

$d_{c\alpha}$ – учетная сложная ставка процента, учитывающая инфляцию;

j_α – номинальная ставка сложного процента, учитывающая инфляцию;

g_u – номинальная сложная учетная ставка, учитывающая инфляцию.

Зададим годовой уровень инфляции α и простую годовую ставку ссудного процента i. Тогда для наращенной суммы S, превращающейся в условиях инфляции в сумму S_α, используем формулу: $S_\alpha = P(1 + i_\alpha)$.

Для данной суммы можно записать **еще одно соотношение**:

$$S_\alpha = P(1+i)(1+\alpha),$$

а затем составить уравнение эквивалентности:

$$(1+i_\alpha) = (1+i)(1+\alpha),$$

из которого следует, что

$$i_\alpha = i + \alpha + i \cdot \alpha.$$

Мы получили, таким образом, известную ***формулу И. Фишера***, где сумма $(\alpha + i_\alpha)$ является величиной, которую необходимо прибавить к реальной ставке доходности для компенсации инфляционных потерь. Эта величина называется ***инфляционной премией.***

Формула И. Фишера поможет избежать еще одной распространенной ошибки. Часто для подсчета процентной ставки, учитывающей инфляцию, к величине реальной ставки доходности просто прибавляют величину темпа инфляции. Если i = 8% и темп инфляции составляет 7%, то за процентную ставку принимается величина $(i + \alpha)$ = 8% + 7% = 15,0%. Но пренебрегать произведением $i\alpha$ можно только в случае небольших значений i и α, при которых оно составляет незначительную величину (как в странах с развитой рыночной экономикой, где ставки доходности и темпы инфляции невелики). В нашем же случае это произведение составит 0,08 · 0,07 = 0,0056, т.е. 0,56%. Таким образом, ставка доходности, учитывающая инфляцию, в данном случае составила бы 15,0% + 0,56% = 15,56%.

Рассмотрим теперь различные случаи начисления процентов с учетом инфляции. При этом всегда удобно пользоваться значением индекса инфляции за весь рассматриваемый период.

Для простых ссудных процентных ставок получаем:

$$S_\alpha = P(1+n \cdot i_\alpha).$$

В то же время должно выполняться равенство:

$$S_\alpha = P(1+n \cdot i) \cdot I_u.$$

Составим уравнение эквивалентности:

$$1 + n \cdot i_\alpha = (1+n \cdot i) \cdot I_u,$$

из которого получаем:

$$i_\alpha = \frac{(1+n \cdot i) \cdot I_u - 1}{n}.$$

Для простых учетных ставок аналогичное уравнение **эквивалентности** будет иметь вид:

$$\frac{1}{1-n \cdot d_\alpha} = \frac{1}{1-nd} \cdot I_u, \text{ откуда}$$

$$d_\alpha = \frac{1}{n} - \frac{1-n \cdot d}{I_u \cdot n} = \frac{I_u - 1 + n \cdot d}{I_u \cdot n}.$$

Для случая сложных ссудных процентов используем формулы:

$$S_\alpha = (1+i_{c\alpha})^n \text{ и } S_\alpha = (1+i_c)^n \cdot I_u.$$

Отсюда $i_{c\alpha} = (1+i_c) \cdot \sqrt[n]{I_u} - 1$.

Если начисление процентов происходит **несколько (*m*)** раз в году, используется следующая формула:

$$\left(1+\frac{j_\alpha}{m}\right)^{mn} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} \cdot I_u,$$

Отсюда

$$j_\alpha = m\left[\left(1+\frac{j}{m}\right) \cdot \sqrt[mn]{I_u} - 1\right].$$

Таким же образом получаем две формулы **для случаев** сложных учетных ставок:

$$d_{c\alpha} = 1 - \frac{1-d_c}{\sqrt[mn]{Iu}},$$

$$g_\alpha = m\left(1 - \frac{1-\frac{g}{m}}{\sqrt[mn]{I_u}}\right).$$

Используя полученные формулы, можно находить процентную ставку, компенсирующую потери от инфляции, когда заданы процентная ставка, обеспечивающая желаемую доходность финансовой операции, и уровень инфляции в течение рассматриваемого периода. Эти формулы можно преобразовать и получить зависимость i от i_α или любую другую. Например, из формулы $i_\alpha = \frac{(1+n\cdot i)\cdot I_u - 1}{n}$ можно получить формулу, позволяющую определить реальную доходность финансовой операции, когда задан уровень инфляции и простая ставка процентов, учитывающая инфляцию:

$$i = \frac{n\cdot i_\alpha + 1 - Iu}{n\cdot I_u}.$$

Из формулы $i_{c\alpha} = (1+i_c)\cdot\sqrt[n]{I_u} - 1$ получаем аналогичную формулу для случая сложных процентов:

$$i_c = \frac{1+i_{c\alpha}}{\sqrt[n]{I_u}} - 1.$$

Подставив в последнюю формулу вместо индекса инфляции выражение $(1+\alpha)^n$, получим простую формулу:

$$i_c = \frac{1+i_{c\alpha}}{1+\alpha} - 1,$$

отражающую несколько очевидных выводов:
если $i_{c\alpha} = \alpha$ (доходность вложений и уровень инфляции равны), то $i_c = 0$, т.е. весь доход поглощается инфляцией;
если $i_{c\alpha} < \alpha$ (доходность вложений ниже уровня инфляции), то $i_c < 0$, т.е. операция приносит убыток;
если $i_{c\alpha} > \alpha$ (доходность вложений выше уровня инфляции), то $i_c > 0$, т.е. происходит реальный прирост вложенного капитала.

Пример 1.

Кредит в размере 5 млн тенге выдан на два года. Реальная доходность операции должна составить 20% годовых по сложной ставке ссудных процентов. Ожидаемый уровень инфляции составляет 6% в год. Определить множитель наращения, сложную ставку процентов, учитывающую инфляцию, и наращенную сумму.

Решение:

$$I_u = (1+\alpha_m)^m = (1+0{,}06)^2 = 1{,}1236.$$

Множитель наращения и номинальная ставка доходности равны:

$$K_{uc} = (1+i_c)^n \cdot I_u = (1+0{,}2)^2 \cdot 1{,}1236 = 1{,}618.$$

$$i_{c\alpha} = (1+i_c)\cdot\sqrt[n]{I_u} - 1 = (1+0{,}2)\cdot\sqrt{1{,}1236} - 1 = 1{,}272 - 1 = 0{,}272,$$

или 27,2%.

Далее для наращенной суммы получаем:

$$S = 5(1+0{,}272)^2 = 8{,}09 \text{ (млн тенге)}.$$

Пример 2.

При выдаче кредита должна быть обеспечена реальная доходность операции, определяемая учетной ставкой 20% годовых. Кредит выдается на полгода, за которые предполагаемый индекс инфляции составит 1,03. Рассчитать значение учетной ставки, компенсирующей потери от инфляции.

Решение:

Производим вычисления по формуле: $d_\alpha = \frac{I_u - 1 + n\cdot d}{I_u \cdot n} = \frac{1{,}03 - 1 + 0{,}5\cdot 0{,}2}{1{,}03\cdot 0{,}5} = 0{,}2524$, или 25,24%.